L23 5.8 Additional properties of definite integral(定積分額外性質)
Ch.7 Transcendental Functions(超越函數)
One to One function and Inverse(一對一函數和反函數)

Prove that. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}dx = \frac{-\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x}+C$

∫ Adx=B+c

(B)'=~~~ or (B+C)'=~~~ ∫ Adx=(B+C)+C

④ $\int_2^4 x^2\sqrt{4+x^3}dx$

u=4+x^3, then du=3x^2dx

法一 $\frac{1}{3}\int_{12}^{68}\sqrt{u}du = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot u^{\frac{2}{3}} =$

法二 $\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot(4+x^3)^{\frac{2}{3}}\Big|_2^4 =$

⑤ $\int \sec^3 x\tan x dx =$

u=secx, then du=secxtanxdx

$\int u^2 du = \frac{1}{3}\sec^3 x + C$

⑥ $\int x^2\csc^2 x^3\cot^4 x^3 dx =$

u=cotx^3, then du=-csc^{2}x^{3}3x^{2}dx

$-\frac{1}{3}u^4 = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}\cdot\cot^5 x^3 + C$

⑦ $\int_0^{\sqrt{3}} x^5\sqrt{x^2+1}dx$

u=x^2+1, then du=2xdx

$\frac{1}{2}\int_1^4 (u-1)^2\sqrt{u}du = \frac{1}{2}\int_1^4 (u^{\frac{5}{2}}-2u^{\frac{3}{2}}+u^{\frac{1}{2}})du = \frac{1}{2}(\frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}}-\frac{4}{5}u^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}})\Big|_1^4 =$

$\frac{1}{2}\int_*^{**} (u-1)^2\sqrt{u}du = \frac{1}{2}\int_1^4 (u^{\frac{5}{2}}-2u^{\frac{3}{2}}+u^{\frac{1}{2}})du = \frac{1}{2}(\frac{2}{7}(x^2+1)^{\frac{7}{2}}-\frac{4}{5}(x^2+1)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}})\Big|_0^{\sqrt{3}} =$

Ex:P279(1.2.10.22.26.31.47.49.56.58.63.68.73.84)

L23 5.8 Additional properties of definite integral(定積分額外性質)
Ch.7 Transcendental Functions(超越函數)
One to One function and Inverse(一對一函數和反函數)

§ 5.8 additional properties of definite integral

Thm:Let f:[a,b]→ℝ be cont.

① Let M be the maximum value and m the minimum value of f on [a,b].

, then $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$.(M=sup[a,b]f(x), m=inf[a,b]f(x))

② If f≥0, then $\int_a^b f(x)dx\ge 0$

如果有一個連續函數在 ab 閉區間大於或等於零，則它的定積分大於或等於零。

③ If f>0, then $\int_a^b f(x)dx>0$

如果有一個連續函數在 ab 閉區間大於零，則它的定積分大於零。

一般跟零比，會改成函數比大小。

pf:

① 已證

② ∵ f≥0 ∴m≥0. By ①.

③ ∵ f is cont. on [a,b]

∴By Extreme value thm. ∃ x0∈[a,b] s.t. f(x0)=0⇒m>0. By ①.

Q:如果 f>0，則 M>，而不是大於等於 0？
A:By Extreme Value thm. 極小值被取，函數值大於零。
Q:f(x)=1/x on (0,∞)能不能取到極大或極小值？
A:不能，sup(0,∞)f(x), inf(0,∞)f(x)=0，取到必須是在有界閉區間 Extrem value thm.

Cor: Let f and g:[a,b]→ℝ be cont.

① If f≥g on [a,b], then $\int_a^b f(x)dx\ge\int_a^b g(x)dx$.

② If f>g on [a,b], then $\int_a^b f(x)dx>\int_a^b g(x)dx$.

pf:

Let h=f-g, then h is cont. on [a,b].

∵ h≥0 on [a,b] ∴ $\int_a^b h(x)dx \geq 0 \Rightarrow \int_a^b [f(x)-g(x)]dx \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

Thm:Let f:[a,b]→ℝ be cont.

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

如果把這個絕對值拉到裡面去，一個函數取決對值，還是一個函數，它連續取決對值還是連續，定積分會存在，可以比大小。

Q:爲什麼右邊大於左邊？

A:左邊是上下對消的廣義面積取正值，右邊是廣義面積全取正值相加。

By the way~Intermediate value thm.怎麼說的？

兩的端點是函數值，兩個端點內的函數值必被取。

知道怎麼證跟會證是兩回事，你以後就跟老闆講，你只要那樣做就可以了。

pf:

∵ f is cont. on [a,b] ∴ |f| is cont. on [a,b]

∵ -|f|<f<|f| ∴ $-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx \Rightarrow \left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

By the way F(x)= $\int_a^b f(x)dx$ 這是一個面積函數嗎？這是一個數

Chapter 6 請自閱

Chapter7 Transcendental Functions

爲什麼要講這個，原因是現在的函數太少了，積分起來不夠刺激。講完再進入積分非常重要的技巧，不然看不出它的經典。

§ 7.1 one-to-one function and Invers

Def:Let f:I→ℝ be interval.

We say that f is one-to-one on I, if f(x1)≠f(x2) ∀ x1≠x2 ∈I.(if only if~)

L23 5.8 Additional properties of definite integral(定積分額外性質)
Ch.7 Transcendental Functions(超越函數)
One to One function and Inverse(一對一函數和反函數)

口語：$\boxed{\text{我們說函數一對一，如果不同的點取值不一樣}}$

Q:什麼叫這個函數是一對一？A:每個點對應到不一樣的點。
Q:如果這個題目要證一對一？A:取兩個點出來，去證每個點取值不一樣。
Let $x1\neq x2\in I$ s.t. $f(x1)\neq f(x2)$ or Let $x1=x2$ 證得 $f(x1)=f(x2)$

eg. $f(x)=x\^3$ show that f is one-to-one.

pf:

Let $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ s.t. $x_1^3=x_2^3$

$\Rightarrow x_1^3-x_2^3=0\Rightarrow(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)=0\Rightarrow x_1-x_2=0\Rightarrow x_1=x_2$

Therefore f is one-to-one.

Thm: $\boxed{\text{If } f:I\to\mathbb{R} \text{ be an one-to-one function, then } \exists \text{ a function } g:f(I)\to I \text{ such that } g\circ f(x)=x \text{ and } f\circ g(x)=x.}$

反函數的定義域是原函數值域，對應域是原函數定義域。(也可以寫 $g:f(I)\to R$)
一對一函數多不多？不多也不少，可以造出無限多

Def: $\boxed{\text{g is called the inverse of f and is usually denote by } f^{-1}.}$

Q:請問 f^{-1} 是不是一對一？A:是

Rmk:若 f 是一對一，則 f^{-1} 也是一對一，且 $(f^{-1})^{-1}=f$.

eg. Let $f(x)=x^3$. Find $f^{-1}(x)$.

pf:Let $x^3=t$, then $x=\sqrt[3]{t}\Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$.